ハウスドルフ次元とペロンーフロベニウスの定理(非線形解析学と数理経済学の研究)

竹尾, 富貴子

数理解析研究所講究録
829巻 1993年 1-12

ハウスドルフ次元とペロン－フロベニウスの定理

お茶の水女大·理　竹尾　富貴子 (Fukiko Takeo)

§1. 序

経済学においてもフラクタルと深い関係をもつ現象がいろいろある．例えば，グラフに描いた株価の変動の様子は，１日単位でみた場合も，１ケ月にした場合でも，ほとんど同じように複雑に変動しているように見える．これは，時間に対する尺度を大きくしても，小さくしても同じように見えるということで，株価の変動は時間に関してフラクタルであると考えられる．同様に，株価の変動の大きさの頻度分布や，所得の分布などもフラクタル的な性質を持っていると考えられる．このフラクタルの複雑さを示す一つの尺度として，ハウスドルフ次元がある．典型的なフラクタルであるカントール集合とか，コッホ曲線などは，繰返される関数系の不変集合で，お互いほとんど交りを持たない Moran の開集合条件 [4] を満たす自己相似集合である．このような自己相似集合はその相似次元から容易にハウスドルフ次元を求めることができる [2]．しかし，一般の集合のハウスドルフ次元を求めることは容易ではない．V. Drobot and J. Turner は非負の行列に対するPerron-Frobenius の定理を用いて，Moran の開集合条件を満たすような，単位区間の部分集合のハウスドルフ次元を求めている [1]．

ここでは，V. Drobot and J. Turner の方法を発展させて，$\mathbf{R}^d$ の自己相似でない，ある種の部分集合のハウスドルフ次元を求める方法について述べる．そし

て，これは Moran の開集合条件を満たさない関数系の像でも，ある種の条件を満たせば適用できる．

k 個の値をもつ無限数列空間 $E_k^{(\omega)}$ に距離 ρ_δ を導入し，長さ $r+1$ の数列空間 $E_k^{(r+1)}$ の有限集合 F に対し，それから誘導された $E_k^{(\omega)}$ の部分集合 $\mathcal{A}(F)$ と F から誘導された行列 M を考える．行列 M のスペクトル半径 λ_0 を用いて，距離空間 $(E_k^{(\omega)}, \rho_\delta)$ の部分集合 $\mathcal{A}(F)$ のハウスドルフ次元が $\log_{\frac{1}{\delta}}\lambda_0$ であることを示す（命題3.5，定理3.6）．さらに，この結果の応用として，ハウスドルフ次元を保存するような $\mathcal{A}(F)$ から $\mathbf{R}^d$ への写像の条件を調べることにより，$\mathbf{R}^d$ におけるフラクタルのハウスドルフ次元を求める．定理4.1では，Moran の開集合条件より弱い，一種の開集合条件を満たすとき，$\mathcal{A}(F)$ から $\mathbf{R}^d$ への写像はハウスドルフ次元を保存することを示し，定理4.2では，交りのあるような関数系に対しても，ある種の条件下では，ハウスドルフ次元が保存されることを示す．最後にいくつか具体的な例をあげる．

§2．記号と準備

(1)　1から k までの値をもつ数列の集合 $E_k^{(\omega)}$, $E_k^{(n)}$, $E_k^{(*)}$ を

$$E_k^{(\omega)} = \{\underline{x}=(x_j)_{j=1}^{\infty} \mid x_j \in \{1,2,\cdots,k\}\}$$

$$E_k^{(n)} = \{\underline{\alpha}=(\alpha_j)_{j=1}^{n} \mid \alpha_j \in \{1,2,\cdots,k\}\}$$

$$E_k^{(*)} = \bigcup_{n\in N} E_k^{(n)}$$

とする．

任意の数 $n \in N\cup\{0\}$ に対し，写像 $\sigma^n: E_k^{(\omega)} \to E_k^{(\omega)}$ と $P_n: E_k^{(\omega)} \to E_k^{(*)}\cup\{\emptyset\}$ を

$$\sigma^n(x_1x_2\cdots\cdots) = (x_{n+1}x_{n+2}\cdots\cdots)$$

$$P_n(x_1x_2\cdots\cdots)=\begin{cases}(x_1\cdots x_n) & (n\geqq 1)\\ \emptyset & (n=0)\end{cases}.$$

により定義する．

同様に $\sigma^n:\bigcup_{p\geqq n}E_k^{(p)}\to E_k^{(*)}$ と $P_n:\bigcup_{p\geqq n}E_k^{(p)}\to E_k^{(*)}\cup\{\emptyset\}$ も定義する．

次に $\underline{\alpha}\in E_k^{(n)}$ と $\underline{\beta}\in E_k^{(*)}\cup E_k^{(\omega)}$ に対し，$P_n\,\underline{\beta}=\underline{\alpha}$ を満たすとき，$\underline{\beta}>\underline{\alpha}$ と書く．

$\underline{\alpha}\in E_k^{(*)}$ に対し，$\underline{\alpha}$ で始まるすべての無限数列の集合をシリンダ－集合といい，

$[\underline{\alpha}]$ と書く．即ち，

$$[\underline{\alpha}]=\{\underline{\beta}\in E_k^{(\omega)}\mid\underline{\beta}>\underline{\alpha}\}$$

(2) 数列空間 $E_k^{(\omega)}$ に距離 ρ_δ $(0<\delta<1)$ を以下のように導入する．

$\underline{x}=(x_j)$，$\underline{y}=(y_j)\in E_k^{(\omega)}$ に対し，

$$\rho_\delta(\underline{x},\underline{y})=\begin{cases}\delta^n & (\text{ if } P_n\underline{x}=P_n\underline{y}\text{ and } x_{n+1}\neq y_{n+1}\text{ for some } n\in N\cup\{0\})\\ 0 & (\text{ if } \underline{x}=\underline{y})\end{cases}$$

(3)　$r\geqq 1$ に対し，長さ $r+1$ の数列空間 $E_k^{(r+1)}$ の有限部分集合 $F=\{\underline{\alpha}^1,\cdots,$

$\underline{\alpha}^l\}$ を考え，この F から作られる $E_k^{(*)}$ の部分集合 $A(F;p)$，$A(F)$ を

$$A(F;p)=\begin{cases}\{\underline{\gamma}\in E_k^{(p)}\mid P_{r+1}\sigma^{j-1}\underline{\gamma}\in F\text{ for any } j=1,2,\cdots p-r\} & (p\geqq r+1)\\ \{P_p\underline{\alpha}\mid\underline{\alpha}\in F\} & (1\leqq p\leqq r)\end{cases}$$

$$A(F)=\bigcup_{p\in N}A(F;p)$$

により，定義する．

さらに $E_k^{(\omega)}$ の部分集合 $\mathcal{A}_p(F)$，$\mathcal{A}(F)$ を

$$\mathcal{A}_p(F)=\{\underline{x}\in E_k^{(\omega)}\mid\underline{x}>\underline{\gamma}\text{ for some }\underline{\gamma}\in A(F;p)\}$$

$$\mathcal{A}(F)=\bigcap_{p\in N}\mathcal{A}_p(F)$$

により，定義する．

集合 $P_r(F)=\{P_r\underline{\alpha}\mid\underline{\alpha}\in F\}$ を F' で表し，$\#(F')=m$，$F'=\{\underline{\beta}^1,\underline{\beta}^2,\cdots,$

$\underline{\beta}^m\}$ とする．

次に，$m\times m$ 行列 $M=(m_{ij})$

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & (\ \exists\,\underline{\alpha}\in F\ \text{s.t.}\ P_r\underline{\alpha}=\underline{\beta}^i\ \text{and}\ \ P_r(\sigma\underline{\alpha})=\underline{\beta}^j\ )\\ 0 & (\ \text{otherwise}\ )\end{cases}$$

を考え，M を F から誘導された行列という．

(4) 距離空間 (X,d) において，部分集合 E の Hausdorff 次元は次のように定義される： 任意の $\varepsilon>0$ と $s\geqq 0$ に対して

$$H_\varepsilon^s(E)=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam}\ U_i)^s\ \mid\ \mathrm{diam}\ U_i<\varepsilon,\ \cup U_i\supset E\}$$

を定義する．ここで，diam U_i は U_i の直径を表す．

$\varepsilon\searrow 0$ のとき $H_\varepsilon^s(E)$ は単調増加するので，

$$H^s(E)=\lim_{\varepsilon\to 0}H_\varepsilon^s(E)$$

が存在する．このとき，$H^s(E)$ に対し

$$H^s(E)=\begin{cases}\infty & (\ 0\leqq s<s_0\ )\\ 0 & (\ \ \ \ s>s_0\ )\end{cases}$$

をみたすような $s_0\geqq 0$ が存在する．この s_0 を E の <u>Hausdorff 次元</u>という．

§3．無限数列空間のハウスドルフ次元

これ以後，F は $\mathcal{A}(F)=\{\underline{x}=(x_j)_{j=1}^{\infty}\in E_k^{(\omega)}\mid\ x_nx_{n+1}\cdots x_{n+r}\in F\ \text{for any}\ n\in\mathbf{N}\}$ が空集合でないような $E_k^{(r+1)}$ $(r\geqq 1)$ の有限部分集合とし，$F'=P_r(F)=\{\underline{\beta}^1,\underline{\beta}^2,\cdots,\underline{\beta}^m\}$ かつ，M は F から誘導された $m\times m$ 行列でそのスペクトル半径を λ_0 とし，$0<\delta<1$ とする．

この節では $\mathcal{A}(F)$ のハウスドルフ次元を求める．

その際に必要なペロン－フロベニウスの定理について，まず述べる．

正方行列 S が，適当な置換行列 Q により $QSQ^T=\begin{pmatrix}S_{11} & 0\\ S_{21} & S_{22}\end{pmatrix}$ と表されるとき，行列 S は可約行列であるといい，そのような置換行列が存在しないとき，既約行列であるという．

【註】 $m \geqq 2$ のとき，M が $m \times m$ の既約行列ならば，M は零行列ではない．

定理(ペロン－フロベニウスの定理)

$m \geqq 2$ で，S を $m \times m$ の非負行列とし，$r(S)$ を S のスペクトル半径とする．このとき，

(1) $Sv \geqq \lambda v$ なる 零でないベクトル $v \geqq 0$ が存在するならば，$r(S) \geqq \lambda$ である．

(2) S が既約行列ならば，$r(S)$ は正で，$r(S)$ は S の固有値で，$r(S)$ に対応する正の固有ベクトル u がある．即ち，$Su=r(S)u$ かつ，すべての j $(1 \leqq j \leqq m)$ に対し，$u_j>0$ である．

$\mathcal{A}(F)$ が空集合でないという仮定に関し，次の補題が成りたつ．

補題 3.1． 次は同値である．

(1) $\mathcal{A}(F)$ は空集合でない．

(2) $\lambda_0 \geqq 1$ である．

$\mathcal{A}(F)$ のハウスドルフ次元の計算に必要な，$A(F;p)$ や $A(F;p,\gamma_0)$ の要素の数に関する補題を，以下に示す．

補題 3.2． $p \geqq t \geqq r$ で，$\gamma_0 \in A(F;t)$ はある $\beta^j \in F'$ に対し $\sigma^{t-r}\gamma_0 > \beta^j$ を満たすとする．このとき，

$$\#(A(F;p,\gamma_0))=\langle e_j, M^{p-t}1_m\rangle \text{ かつ } \#(A(F:p))=\langle 1_m, M^{p-r}1_m\rangle$$

がなりたつ．

ただし，e_j，1_m の転置ベクトルはそれぞれ $\mathbf{R}^m$ におけるベクトル $e_j^T=$

$(0\cdots0\overset{j}{1}0\cdots0)$, $1_m^T=(1\cdots1)$ で，$<\ ,\ >$ は $\mathbf{R}^m$ に於ける内積であり、$\#(A(F:p))$ は $(A(F:p))$ の元の数を表す.

更に，この内積の値を求めるに際し，ペロン－フロベニウスの定理を用いて次のような評価を得る

<u>補題 3.3</u>.　1)　すべての $p\geq r$ に対して

$$\#(A(F;p))\leq c_0(p-r)^n\lambda_0^{p-r}$$

が成りたつような $c>0$ が存在する.

2)　F から誘導された行列 M が既約ならば，ある $c>0$ が存在して

すべての $p\geq r$ に対して　$\lambda_0^{p-r}\leq\#(A(F;p))\leq c_0\lambda_0^{p-r}$　かつ

$p\geq t\geq r$ を満たすような $\gamma_0\in A(F:t)$ に対し，$\#(A(F;p,\gamma_0))\leq c\lambda_0^{p-t}$

が成りたつ.

ハウスドルフ次元の下からの評価のため，次の補題が必要である.

<u>補題 3.4</u>.　E を $(E_k^{(\omega)},\rho_\delta)$ のコンパクトな部分集合とし，$s>0$ とする.

このとき，以下のような性質を満たす $\varepsilon>0$ が存在するならば，$\dim E\geq s$ である.

"$[\gamma^j]$ の直径が ε 以下で，シリンダー集合 $[\gamma^i]$ と $[\gamma^j]$ $(i\neq j)$ が共通部分を持たないで $\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{diam}[\gamma^j])^s\leq1$ が成りたつならば，$E_k^{(\omega)}$ のどんな有限集合 $\{\gamma^1,\cdots,\gamma^n\}$ に対しても，$\bigcup_{j=1}^{n}[\gamma^j]$ は E を覆うことはできない."

補題 3.3 及び 3.4 を用いて，M が既約行列のときハウスドルフ次元に関する次の命題を得る.

<u>命題 3.5</u>.　M が既約行列ならば，距離空間 $(E_k^{(\omega)}, \rho_\delta)$ の部分集合 $\mathscr{A}(F)$ に対し，$\dim\mathscr{A}(F) = \log_{\frac{1}{\delta}}\lambda_0$　が成りたつ．

M が可約行列の場合でも，補題 3.3(2) 及び命題 3.5 から，次の定理が導かれる．

<u>定理 3.6</u>.　F は $\mathscr{A}(F) = \{\underline{x} = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E_k^{(\omega)} \mid x_n x_{n+1} \cdots x_{n+r} \in F$ for any $n \in \mathrm{N}\}$ が空集合でないような $E_k^{(r+1)}$ $(r \geqq 1)$ の有限部分集合とし，F から誘導された $m \times m$ 行列 M のスペクトル半径を λ_0 とする．

このとき，距離空間 $(E_k^{(\omega)}, \rho_\delta)$ $(0<\delta<1)$ における $\mathscr{A}(F)$ のハウスドルフ次元は

$$\dim\mathscr{A}(F) = \log_{\frac{1}{\delta}}\lambda_0$$

である．

§4．R^d におけるフラクタルのハウスドルフ次元

この節では，$(f_1, \cdots, f_k)$ を R^d における縮小比 $\delta(0<\delta<1)$ の自己相似写像の繰返しの関数系，即ち，任意の $u, v \in \mathrm{R}^d$ に対し，$\| f_j(u) - f_j(v) \| = \delta \| u - v \|$ が成りたつとする．このとき，$K = \bigcup_{j=1}^{k} f_j(K)$ を満たすような $(f_1, \cdots, f_k)$ に関するコンパクトな不変集合 K が一意に存在することが知られている [3]．カントール集合，コッホ曲線，シェルピンスキー・ガスケットなどいくつかの典型的なフラクタルは，ある自己相似写像の繰返しの関数系に関する不変集合で，これらのハウスドルフ次元はよく知られている．しかし，一般のフラクタル集合のハウスドルフ次元を求めることは，容易ではない．ここでは，繰返しの関数系のある種の部分集合に対するハウスドルフ次元を前の節の結果を用いて求める方法について述べる．

前節の結果を用いるために，無限数列空間 $E_k^{(\omega)}$ からコンパクト不変集合 K への自然な埋め込み写像 φ で任意の $\underline{x}=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in E_k^{(\omega)}$ に対し $\varphi(\underline{x})=\bigcap_{n=1}^{\infty} f_{x_1}f_{x_2}\cdots f_{x_n}(K)$ なるものを考える．

<u>定理 4.1</u>．　$(f_1,\cdots,f_k)$ を$\mathbf{R}^d$における縮小比 $\delta\,(0<\delta<1)$ の自己相似写像の繰返しの関数系とし，K を $(f_1,\cdots,f_k)$ に関するコンパクトな不変集合，φ を自然な埋め込み写像とする．F は $\mathcal{A}(F)$ が空集合でないような $E_k^{(r+1)}$ $(r\geq 1)$ の有限部分集合とし，$F'=P_r(F)=\{\underline{\beta}^1,\underline{\beta}^2,\cdots,\underline{\beta}^m\}$ とする．このとき

(4.1)　　　　$i\neq j$ なる $\underline{\beta}^i,\underline{\beta}^j\in F'$ に対して $f_{\underline{\beta}^i}(U)\cap f_{\underline{\beta}^j}(U)=\emptyset$

かつ

(4.2)　　　　$(\mathcal{A}(F))\subset\bar{U}$

を満たすような空でない有界な開集合 U が存在するならば，距離空間 $(E_k^{(\omega)},\rho_\delta)$ に於いて，$\mathcal{A}(F)$ のどんな部分集合 A に対しても

$$\dim A=\dim\varphi(A)$$

が成りたつ．

【註】関数系 $(f_1,\cdots,f_k)$ と自然な埋め込み写像 $\varphi:E_k^{(\omega)}\to K$ があるとき，ハウスドルフ次元が等しくなる条件として，Moran の開集合条件が知られている．それは

“$i\neq j$ ならば，$f_i(U)\cap f_j(U)=\emptyset$ がなりたち，すべての i に対して，$U\supset f_i(U)$ が成りたつ“

ことである．

このことは，上述の定理4.1 の系として，でてくる．

<u>定理 4.1の系</u>　関数系 $(f_1,\cdots,f_k)$ が Moran の開集合条件を満たせば距離空間

$E_k^{(\omega)}$ の任意の部分集合 A に対し，$\dim A = \dim\varphi(A)$ が成りたつ．

更に関数系にある程度の交りがある場合も，その中の特別なものに交りが無ければ，ハウスドルフ次元が保存されることを示すのは次の定理である．

<u>定理 4.2</u>． $(f_1, \cdots, f_k)$，K，φ，F，$\{\underline{\beta}^1, \underline{\beta}^2, \cdots, \underline{\beta}^m\}$ は定理4.1 と同じとする．M は F から誘導された行列とし，$v=(v_j)$ を M のスペクトル半径 λ_0 に対応する非負の固有ベクトルとする．J_0，F_0 を以下のように決める．

$J_0=\{j\in\{1, \cdots, m\} \mid v_j>0\}$，$F_0=\{\underline{\alpha}\in F \mid$ $\underline{\alpha}>\underline{\beta}^i$，$\sigma\underline{\alpha}>\underline{\beta}^j$ なる $i, j\in J_0$ が存在する$\}$

このとき，

$$J_0 \text{ の異なる元 } i, j \text{ に対して } f_{\underline{\beta}^i}(U)\cap f_{\underline{\beta}^j}(U)=\emptyset$$

かつ

$$\varphi(\mathcal{A}(F_0)) \subset \bar{U}$$

を満たすような空でない有界な開集合 U が存在するならば，距離空間 $(E_k^{(\omega)}, \rho_\delta)$ の部分集合 $\mathcal{A}(F)$ に対して

$$\dim\mathcal{A}(F) = \dim\varphi(\mathcal{A}(F))$$

が成りたつ．

§5．例

この節では，定理4.1 及び 4.2 を使っていくつかのフラクタルのハウスドルフ次元を求める．

(1) コッホ曲線のハウスドルフ次元は相似次元から容易に求められることがよく知られているが，定理4.1 を使った方法を述べる．繰返しの関数系として，$f_1(z)=\mu\bar{z}$，$f_1(z)=\overline{\mu z}+\mu$ を考える．ただし，$\mu=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}i$ で $\bar{z}$ は z の複

素共役である.

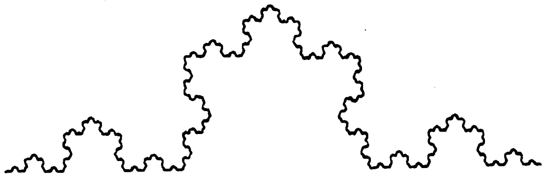

図1

このとき，コッホ曲線はf_1，f_2による自然な埋めこみ写像の像である．Fとして集合｛(11)，(12)，(21)，(22)｝とすると，Fから誘導された行列Mは$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$でそのスペクトル半径$\lambda_0$は2である．$(E_2^{(\omega)}, \rho_{\frac{1}{\sqrt{3}}})$に於ける$\mathcal{A}(F)$のハウスドルフ次元は定理3.6により$\log_{\sqrt{3}}2$となる．$U=\{z=\xi+i\eta \mid 0<\eta<\frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{3}\eta<\xi<1-\sqrt{3}\eta\}$は定理4.1の系の仮定を満たすのでコッホ曲線のハウスドルフ次元は$\log_3 4$となる.

(2) 繰返しの関数系として，$f_1(z)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)z$，$f_2(z)=(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)z+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ $(z\in\mathbb{C})$ を考える．関数系(f_1, f_2)に関する不変集合は図(2a)に示すように，いわゆるドラゴンと呼ばれるものである．このハウスドルフ次元は2であるが，この境界(図2b)のハウスドルフ次元は整数ではない.

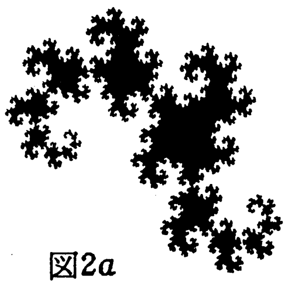

図2a

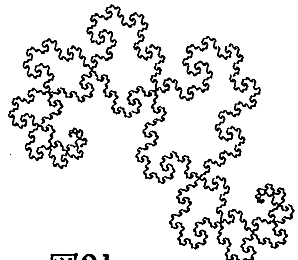

図2b

$f_3(z)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)z$ を考え，F=｛(111)，(112)，(122)，(123)，(211)，(212)，(221)，(231)，(311)，(312)｝とすると，$\mathcal{A}(F)$の自然な埋め込み写像の像はド

ラゴンの境界 (図2b) になる．このとき，$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり，

行列 M のスペクトル半径 λ_0 は次の方程式を満たす．

$$(\lambda_0{}^3-\lambda_0{}^2-2)\lambda_0{}^3=0$$

λ_0 は，約 1.6956 となる．定理4.1の系の条件を満たす $\mathbf{R}^d$ の空でない有界開集合 U は容易にみつけられないが，U として，ドラゴンの内部とすると，定理4.1 の仮定を満たす．従って，定理4.1 を用いて，ドラゴンの境界のハウスドルフ次元は $\log_{\sqrt{3}}\lambda_0$ で約 1.5236 となる．

(3) $E_4^{(2)}$ の部分集合 $F=\{(11),(12),(21),(22),(31),(32),(33),(34),(41),(42),(43),(44)\}$ を考えると，$F'=\{(1),(2),(3),(4)\}$，$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ かつ M のスペクトル半径は 2 となり，$\mathcal{A}(F)$ のハウスドルフ次元は定理3.6により $\log_3 4$ となる．次に以下のような 4 つの関数系をとり，$\mathcal{A}(F)$ の自然な埋め込みによる像を考える．

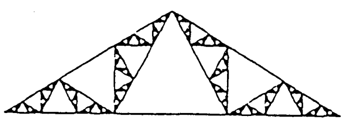

図3a

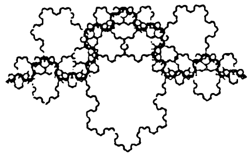

図3b

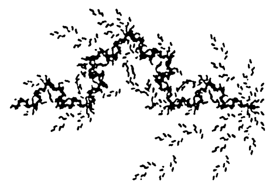

図3c

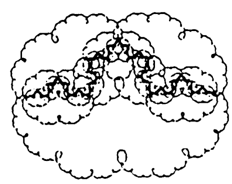

図3d

$3a: f_1(z)=\delta z,\ f_2(z)=\delta z+1-\delta,\ f_3(z)=\mu\bar{z},\ f_4(z)=\overline{\mu z}+1-\bar{\mu}$

$3b: f_1(z)=\overline{\mu z},\ f_2(z)=\mu\bar{z}+1-\mu,\ f_3(z)=\mu\bar{z},\ f_4(z)=\overline{\mu z}+1-\bar{\mu}$

$3c: f_1(z)=\delta\bar{z},\ f_2(z)=\mu z+1-\mu,\ f_3(z)=\mu\bar{z},\ f_4(z)=\overline{\mu z}+1-\bar{\mu}$

$3d: f_1(z)=\bar{\mu}z,\ f_2(z)=\mu z+1-\mu,\ f_3(z)=\mu\bar{z},\ f_4(z)=\overline{\mu z}+1-\bar{\mu}$

ここで，$\mu=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}i$，$\delta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする．$3a \sim 3c$ において、f_1f_1 と f_3f_3 は同じになるので，定理4.1の(4.1)，(4.2) を満たすような開集合 U はないが，$v^T=(0\ \ 0\ \ 1\ \ 1)$，$J_0=\{3,4\}$，$F_0=\{(33),(34),(43),(44)\}$ として，定理 4.2 を用いることができる．このとき，$Mv=2v$ となり，$U=\{z=\xi+i\eta \mid 0<\eta<\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$，$\sqrt{3}<\xi<1-\sqrt{3}\eta\}$ は定理 4.2 の仮定を満たす．従って，定理 4.2 を用いて，これらの次元は $\log_3 4$ となる．

【参考文献】

[1] V. Drobot and J. Turner, *Hausdorff Dimension and Perron-Frobenius Theory*, Illinois U. of Math. **33**(1989),1-9.

[2] G. A. Edgar, "Measure, topology and Fractal Geometryu", Springer-Verlag, 1990

[3] J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30**(1982), 713-747.

[4] P. A. Moran, *Additive functions of intervals and Hausdorff measure*, Proc. Camb. Phil. Soc. **42**(1946), 15-23.

[5] F. Takeo, *Hausdorff dimension of a set of sequences and its application to some fractals*, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhauser Verlag, to appear.